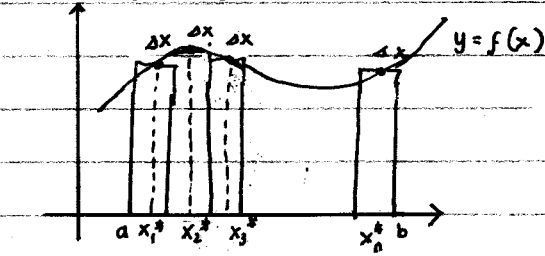


Bab 3 : Integrasi Numerik dan Integrasi Tak Wajar

3.1 Integrasi Numerik

* Hampiran Jumlahan Riemann



$$\int_a^b f(x) dx \approx f(x_1^*) \Delta x + f(x_2^*) \Delta x + \dots + f(x_n^*) \Delta x$$

$$= \Delta x \left[\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \right]$$

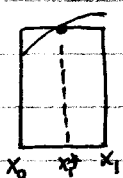
dengan Δx seragam, yaitu $\frac{b-a}{n} = \Delta x$

Terdapat 3 tipe hampiran (tabel 3.1 hal 108)



x_0
 x_1
 x_1^*

Ujung kiri



$$x_1^* = \frac{x_1 - x_0}{2}$$

Tengah

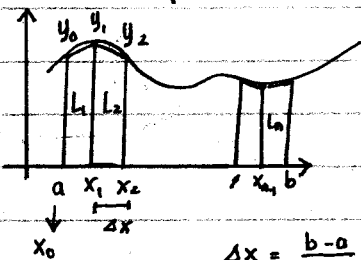


x_1
 x_1^*

Ujung kanan

Paling sering digunakan $\rightarrow$ hampiran tengah, karena punya error terkecil.

* Aturan Trapezoidal



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Jumlahan luasan Trapezium

$$\begin{aligned} \rightarrow L_1 &= \frac{1}{2} (y_0 + y_1) \cdot \Delta x \\ &= \frac{1}{2} (y_0 + y_1) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \left(\frac{b-a}{2n} \right) \cdot (y_0 + y_1) \end{aligned}$$

$$\rightarrow L_2 = \left(\frac{b-a}{2n} \right) \cdot (y_1 + y_2)$$

$\vdots$

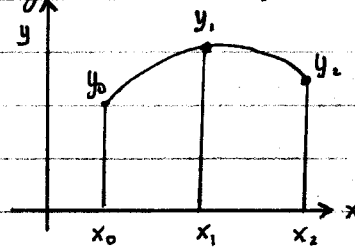
$$\rightarrow L_n = \left(\frac{b-a}{2n} \right) \cdot (y_{n-1} + y_n)$$

Maka :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n \\ &\approx \left(\frac{b-a}{2n} \right) [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n] \\ &\approx \left(\frac{b-a}{2n} \right) [y_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n] \end{aligned}$$

* Aturan Simpson

Syarat : Jumlah partisi n harus genap



$$\begin{aligned} h &= \Delta x \\ &= \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots \\ &\quad + \frac{h}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &\approx \frac{b-a}{3n} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \end{aligned}$$

3.2 Integral Tak Wajar

► Integral pada Selang Tak Hingga

* Karakteristik Soal :

- Batas menuju tak hingga : $(-\infty, b]$; $[a, +\infty)$; $(-\infty, +\infty)$
- Integral dengan integrannya tak terdefinisi di suatu titik dalam selang integrasi

* Cara menyelesaikan soal $\rightarrow$ dengan mendekati menggunakan limit.

$$(a) \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

$$(b) \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

$$\begin{aligned} (c) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 f(x) dx + \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p f(x) dx \end{aligned}$$

Catatan : persamaan (a), (b), (c) memiliki kemungkinan :

① Konvergen $\rightarrow$ nilai integral = nilai limit

② Divergen $\rightarrow$ limit tak ada

Catatan :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Contoh soal :

$$\begin{aligned} 1). \text{ b. } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_1^p \frac{dx}{x^3} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^p \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Karena apabila $\lim_{p \rightarrow +\infty}$ disubstitusi pada $-\frac{1}{2p^2}$, hasilnya:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2p^2} = 0, \text{ maka:}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} \quad (\text{konvergen})$$

► Integral dengan Integrannya Menuju Tak Hingga

contoh : $\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^{3/2}} dx$, apabila disubstitusi $x=2$

($x=2$ termasuk dalam antara $0-3$), maka nilainya tak terdefinisi.

* Contoh Soal :

$$a). \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = \dots$$

untuk $x=1$, $f(x)$ tak terdefinisi.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{t \rightarrow 1} \int_t^2 \frac{1}{x-1} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left[\ln|x-1| \right]_t^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \ln|1| - \ln|t-1| \end{aligned}$$

Gunakan substitusi : $\lim_{x=1,001, \text{ dst.}}$

$$= -(-\infty)$$

$$= \infty \quad (\text{Divergen})$$

$$\ln(0) \rightarrow \text{mendekati } -\infty$$

$$\ln(1) = 0 ; \ln(e) = 1$$

$$b). \int_2^4 \frac{1}{x-4} dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_2^4 \frac{1}{x-4} dx = \lim_{t \rightarrow 4^-} \int_2^t \frac{1}{x-4} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \left[\ln|x-4| \right]_2^t \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 4^-} \ln|t-4| - \ln 2$$

$$= -\infty - \ln 2 \quad (\text{Divergen})$$

$$c). \int_0^3 \frac{1}{x-2} dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{x-2} dx &= \int_0^2 \frac{1}{x-2} dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{1}{x-2} dx + \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^3 \frac{1}{x-2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\ln|x-2| \right]_0^t + \lim_{t \rightarrow 2^+} \left[\ln|x-2| \right]_t^3 \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \ln|t-2| - \ln 2 + \dots \end{aligned}$$

$$= -\infty - \ln 2 \quad (\text{Divergen})$$

3.3 Limit Bentuk Tak Tentu

Catatan : Bentuk Tak Tentu $\rightarrow \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$

Beberapa jenis penyelesaian :

1). Bentuk $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ atau } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{jika : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= 0 \end{aligned}$$

→ Gunakan dalil L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Apabila masih ditemukan bentuk tak tentu, teruskan ulangi turunan.

b). Bentuk $\frac{\infty}{\infty}$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ atau $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Jika : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

→ Gunakan dalil L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

c). Bentuk $0 \cdot \infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

maka : trik penyelesaiannya dengan mengubah / memanipulasi ke dalam bentuk :

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

atau ke dalam bentuk

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

Langkah 2 : Gunakan dalil L'Hopital

d). Bentuk $\infty - \infty$

$\lim [f(x) - g(x)]$ dan $\lim [f(x) + g(x)]$

menghasilkan :

$(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$

$(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$

Penyelesaian :

• Manipulasi $f(x) - g(x)$ atau $f(x) + g(x)$ menjadi

bentuk pecahan $\frac{a(x)}{b(x)}$

• Gunakan dalil L'Hopital

e). Bentuk $0^0, \infty^0, 1^\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$$

menghasilkan $0^0, \infty^0$, dan 1^∞

Penyelesaian langkah per langkah :

1). Ambil $y = f(x)^{g(x)}$

2). Ubah kedua ruas dalam $\ln$

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$

$$= g(x) \ln f(x)$$

3). limitkan kedua ruas

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$$

Dalam hal ini, $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$

Latihan Soal !

a). $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2} dx$

b). $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$